독립심화학습 2주차

2017103580 사회학과 김정운

최적제어문제는 기존의 변분법 및 programming과 어느 관계를 가지고 있는데, control u(t)를 dx/dt로 설정하면 제어문제는 변분법이 된다. 또한 u(t)와 dx/dt가 cost function과 제약조건에 존재하지 않으면, 이는 programming이 된다. 즉, 변분법과 programming은 최적제어문제의 특수한 경우라고 할 수 있다. 하지만 제어문제를 변분법으로도 변형할 수 있는데, 다음과 같은 문제에서 최적제어를 찾는다고 가정하자.

subject to , =a,

새로운 변수 를 도입하고 이라고 한다면, 에 대한 변분법 문제로 바꿀 수 있다. 또한 , 이고 를 에 대해 미분한다면, i번째 행을 (0, … 1, ... )으로 하는 nx(2n+2m+1)행렬이 된다. 성분 1이 같은 열에 존재하지 않기 때문에 계수를 n으로 가지며, 이는 bolza problem을 정의하기 위한 필요조건이다. 최적제어문제를 변분법으로 변환하기 위해서는 몇 가지 조건이 필요한데, 이는 기존 문제에 대한 정보(제약조건 등)를 보존하고 Bolza problem을 새로운 문제에서도 정의할 수 있다는 것을 보장한다.

만약 r개의 제약조건 … 가 있다고 한다면, 새로운 변수 를 도입한다. 이후 방정식 은 기존 에 를 성분으로 추가하면 된다. 정의역의 차원과 새로운 방정식이 추가된 것 외는 차이가 없지만, 제약조건이 있는 최적화 문제를 변분법으로 변환하기 위해서는 추가적인 제약조건이 필요하다. 이에 대한 자세한 설명은 Leonard D. Berkovitz, Negash G. Medhin(2013)에서 확인할 수 있는데, 그러한 조건은 Bolza problem을 정의하기 위한 조건인 nx(2n+2m+2r+1)행렬의 계수가 n+r이라는 사실을 증명할 때 사용한 거 같다.

이러한 변환은 변분법에 대한 여러 정리들을 사용할 수 있게 한다는 장점을 가진다. optimal control problem이 변분법을 일반화한 것이기 때문에, 전자의 정리가 후자보다 적다. 이는 변분법에서 최적해에 대한 여러 성질들을 보다 쉽게 얻을 수 있음을 의미한다. 또한 변환을 수행한 다음에 행렬의 계수를 구했는데, 이는 optimal control을 state에 대해 기술할 수 있게 한다. 이처럼 state에서 optimal control로 대응시키는 함수 ψ가 있으면, ψ를 feedback이라고 한다. 이는 state를 활용하여 최적의 의사결정을 할 수 있게 할 뿐만 아니라, 기존의 정보를 활용하기 때문에 연산속도를 높일 수 있다.

이전 미적분학에서 g(x)=0를 만족하는 x 중에서 함수 f(x)를 최소화하는 해를 다음과 같이 구했다. f와 g가 함수이라면 라그랑지안 승수 λ를 이용하여 “∇f(x)+λ\*∇g(x)=0”을 만족하는 x와 λ를 구한 다음에, 그 중에서 f(x)를 최소화하는 x를 찾으면 되었다(∇f(x)는 f의 gradient)). 이에 대한 증명은 아래처럼 3가지 방법으로 할 수 있는데, x가 x(t)로 대체되어도 t가 양의 실수공간에서 정의되기 때문에 라그랑지안 승수법을 여전히 사용할 수 있다. 즉, 변분법과 최적제어문제에서도 라그랑지안 승수법을 사용할 수 있다.

x\*가 위에서 언급된 문제에 대한 최적해이며, ={x| f(x)=f(x\*)-e}, G={x| g(x)=0}, A={x| f(x)=f(x\*)}라고 하자. 그러면 e가 0이 아니면 와 G의 교집합은 공집합이어야 하는데, 그렇지 않으면 f(x)<f(x\*)와 g(x)=0이라는 것은 x\*가 최적해라는 사실에 위배되기 때문이다. 이로 인해 e=0 일 때 와 G가 접하며, 이는 f(x)와 g(x)의 도함수가 서로 수평이라는 것과 동치다. 따라서 ∇f(x)+λ∇g(x)=0이고 이를 적분하면, f(x)+λ\*g(x)=0이 된다.

다른 증명은 implicit function theorem을 이용하는 것인데, F(x,r)=(f(x)-f(x\*)+r, g(x))=(0,0)의 야코비안 행렬이 (x\*,0)에서 계수 2를 가진다고 가정하자. 이는 방정식의 해이며, implicit function theorem으로 인해 U의 모든 원소 x에 대해 F(x,r)=(0,0)이 성립하는 U가 존재한다. f의 연속성으로 인해 f(x)<f(x\*) and h(x)=0가 성립하는 x가 x\* 인근에 존재하게 되는데, 이는 x\*가 최적해라는 것에 위배된다. 따라서 F(x,r)는 (x\*,0)에서 야코비안의 계수를 2로 가질 수 없으며, 이는 ∇f와 ∇g가 선형종속임을 의미한다. 따라서 이전과 동일한 결론을 얻을 수 있다.

이번에는 “”와 를 이에 대한 최소값이라고 가정하자. a=0이면 우리가 풀고자 하는 문제에 대응되기 때문에, V(0)=f(x\*)가 성립한다. 정의로 인해 V(a)<=f(x)와 a=g(x)가 성립하기 때문에 f(x)-V(g(x))>=0이 된다(등식은 x=x\*에서 성립한다). 이를 x에 대해 미분한 다음에 x=x\*를 대입하면 ∇f(x\*)-V(g(x\*))∇g(x\*)=0이 되고, V(g(x\*))는 정의상 상수라는 점에서 라그랑지안 승수법을 얻을 수 있다.

이러한 라그랑지안 승수법은 부등식이 존재할 때도 사용할 수 있는데, 에 대응되는 라그랑지안 승수법은 η\*∇f(x)+λ\*∇g(x)+γ\*∇h(x)=0을 만족하는 x 중에서 최적해를 찾는 것이다(η=0 or 1, λ, <λ, g(x\*)>=0). Cost function f에 η를 곱한 이유는 제약조건이 많음으로써 함수 f를 최적화하지 못한 상황을 표현하기 위함인데, 이때 η는 0을 가지며 abnormal case라고 한다. 이에 대한 증명은 학부 수준을 넘어가기 때문에 생략하겠지만, 부등식 제약조건이 있는 라그랑지안 승수법의 의미는 다음과 같다. <f’(x\*),v><0, <g’(x\*),v><0을 동시에 만족하는 벡터 v가 존재한다고 가정하자. 즉, v는 x\*에서 f와 g의 값을 감소시키는 벡터라는 것이며, 이로 인해 f(x\*+tv)<f(x\*), g(x\*+tv)<0을 만족하는 t가 존재해야 한다. 테일러 정리를 활용하면 f(x\*+tv)=f(x\*)+f’(x\*)\*(vt)+o(t^2)가 되는데, 이를 v의 정의와 t가 충분히 작다는 것과 결합하여 부등식을 증명할 수 있다. 하지만 이는 x\*가 제약조건 하에서 최적이라는 것에 위반되기 때문에, 그러한 v는 존재하지 않는다.

참조

Nonlinear Optimal Control Theory(Leonard D. Berkovitz, Negash G. Medhin, 2013, (2.6.6), p30)